1) Pruebe q' $G=\left\{\begin{pmatrix} a & -b\\ b & a\end{pmatrix} : a^2+b^2\neq 0\right\}$ es grupo.

Por alg. lineal, $\cdot$ es asociativa.

$$\begin{pmatrix} a & -b\\ b & a\end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & -d\\ d & c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac-bd & -(ad+bc)\\ ad+bc & ac-bd\end{pmatrix}$$

$$(ac-bd)^2+(ad+bc)^2 = (a^2+b^2)(c^2+d^2)\neq 0$$

$\therefore$ G es cerrado para la $\cdot$.

$$\begin{pmatrix} a & -b\\ b & a\end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix} a & b\\ -b & a\end{pmatrix}$$ $\therefore$ Todo ele. de G tiene inverso

$$e = \begin{pmatrix} 1 & -0\\ 0 & 1\end{pmatrix} (\in G).$$

2) $o(ab)=o(ba)$

Suponga q' $o(ab)=n$. (Asumo $o(ab)$ finito)

$$(ab)^n = \underbrace{(ab)(ab)\cdots(ab)}_{n \text{ veces}} = e \quad \text{y} \quad \underbrace{(ab)\cdots(ab)}_{n-1 \text{ veces}}\neq e$$

$$\therefore\ a(ba)(ba)\cdots(ba)b=e \quad \therefore \underbrace{(ba)\cdots(ba)}_{n-1 \text{ veces}} = a^{-1}b^{-1}$$

$$\therefore\ \underbrace{(ba)\cdots(ba)}_{n-1}(ba) = (a^{-1}b^{-1})ba = e \quad \therefore (ba)^n = e.$$ Eso prueba q' $o(ba)\geq n = o(ab)$. Analogamente se prueba que $o(ab)\leq o(b$

3) Halle el # de generadores de $\mathbb{Z}_{pq}$

si $1 \leq k < pq$ es t.q $\langle k \rangle = \mathbb{Z}_{pq}$ entonces $m.c.d(k, pq) = 1$. Entonces

$$k \notin \{\underbrace{p, 2p, \ldots, (q-1)p}, q, 2q, \ldots, (p-1)q\} = A$$

$$|A| = (q-1) + p - 1 = p + q - 2$$

$$\therefore \quad (pq-1) - (p+q-2) = pq - p - q + 1$$

es el # de generadores de $\mathbb{Z}_{pq}$

$\mathbb{Z}_{15}$ $(15-1) - (3+5-2) = 8$ $(1, 2, 4, 7, 8, 11, 13, 14)$

$\mathbb{Z}_{6}$ $(6-1) - (3+2-2) = 2$ $(1, 4)$

4) a) $|G| = pq$, $H < G \Rightarrow H$ cíclico.

$H \lneq G \underset{\uparrow}{\Rightarrow} |H| \,\big|\, |G| \Rightarrow |H| \,\big|\, pq \Rightarrow |H| \,\big|\, p$ o $|H| \,\big|\, q$ pues

Teo. Lagrange o $|H| = 1$

$H \lneq G \Rightarrow |H| < (|G| = pq)$. $\therefore$ H es cíclico pues p y q son primos.

b) S_3. no es cíclico. No es ni abeliano

Sus subgrupos propios son de ordenes 2 y 3 y por tanto cíclicos

Igual sucede con el grupo de Klein

2) Sea $\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. De la tab de multiplicacion de $\langle \rho \rangle$. Es este grupo isomorfo a S_3!

$$\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix} = (1\,2\,4)(3\,5)$$

$$\rho^2 = (124)(35)(124)(35) = (3)(5)(1\,4\,2) = (142)$$

$$\rho^3 = (124)(35)(142) = (1)(4)(2)(35) = (35)$$

$$\rho^4 = (124)(35)(35) = (124). \quad \rho^5 = \rho^2\rho^3 = (142)(35)$$

$$\rho^6 = \rho\,\rho^5 = (124)(35)(142)(35) = id$$

$$\therefore \langle \rho \rangle = \{\rho, \rho^2, \rho^3, \rho^4, \rho^5, \rho^6 = id\}$$